ELSEVIER

Journal of Geometry and Physics 26 (1998) 79–96

JOURNAL OF GEOMETRY AND PHYSICS

Formes normales de structures de Poisson ayant un 1-jet nul en un point

J.-P. Dufour *, A. Wade

Dept. de Mathématiques, c.c. 051, Université de Montpellier II, Place E. Bataillon, F-34095 Montpellier, Cedex 05, France

Received 8 April 1997; received in revised form 16 June 1997

Abstract

Singularities of Poisson structures where 1-jet vanishes appear in a stable manner because they are generically not destroyed by small perturbations of the Poisson structure. In this paper we study these singularities. We give first a normal form for Poisson structures with zero 1-jet but with a "generic" 2-jet at a point. We give also a "quadratisation" result in class C^∞.

Résumé

Les singularités des structures de Poisson oú le 1-jet est nul apparaissent de façon stable en ce sens qu'elles ne disparaissent pas, en général, sous une petite perturbation de la structure de Poisson. Cet article est consacré à l'étude de ces singularités. Nous donnons d'abord une forme normale pour les structures de Poisson à 1-jet nul mais avec un 2-jet "générique" en un point. Nous en déduisons un critère de "quadratisabilité" en class C^∞.

Subj. Class.: Differential geometry
1991 MSC: 17B99
Keywords: Poisson structure; Singularities

0. Position du probléme

Dans ce travail, la différentiablité est entendue au sens C^∞.

Une structure de Poisson sur une variété différentiable M est la donnée sur l'anneau $C^\infty(M, \mathbb{R})$ des fonctions différentiables, d'une loi de composition interne $\{\ ,\ \}$, appelée

* Corresponding author. E-mail: dufour@math.univ-montp2.fr.

PII S0393-0440(97)00039-9

crochet de Poisson qui est bilinéaire, antisymétrique et qui vérifie les identités de Leibniz et de Jacobi:

$$(L) \qquad \{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\},$$

$$(J) \qquad \{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0,$$

quels que soient f, g et $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Se donner une structure de Poisson sur M revient à se donner un champ de bivecteurs Π vérifiant $[\Pi, \Pi] = 0$, où le crochet $[\ ,\ ]$ est celui de Schouten. Ce champ de bivecteurs est appelé *tenseur de Poisson*; il est lié au crochet de Poisson par la relation $\Pi(\mathrm{d}f, \mathrm{d}g) = \{f, g\}$ pour tous $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est un système de coordonnées définies sur un ouvert U alors on a l'expression locale:

$$\Pi = \sum_{i<j} \{x_i, x_j\} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

En remplaçant les fonctions différentiables par les fonctions holomorphes, on définit des notions analogues sur les variétés complexes.

Soit Π une structure de Poisson sur M et m_0 un point de M. Réduire Π à une forme normale au voisinage de m_0, c'est trouver des coordonnées locales autour de m_0 dans lesquelles l'écriture de Π est la plus simple possible. On sait [We1] que Π est le produit d'une structure symplectique par une structure de Poisson qui s'annule en m_0. Il s'agit donc d'étudier les formes normales des structures de Poisson qui sont nulles en m_0. Dans de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$ nulles en m_0, de telles structures de Poisson s'écrivent sous la forme:

$$\{x_i, x_j\} = \sum \lambda_{ij}^k x_k + \sum c_{ij}^{rs} x_r x_s + \text{termes d'ordre} \geq 3.$$

Le premier pas à entreprendre consiste à chercher de nouvelles coordonnées $(y_1, \ldots, y_n)$ nulles en m_0 vérifiant $\{y_i, y_j\} = \sum \lambda_{ij}^k yk$. Si de telles coordonnées existent, la structure de Poisson Π est dite linéarisable. La linéarisation des structures de Poisson a été beaucoup étudiée, notamment par Conn [C1,C2], Desolneux-Moulis [De], Molinier [Mo], Weinstein [We1].

Dans le cas où le 1-jet en m_0 est nul, c'est à dire que les λ_{ij}^k sont nuls, le 2-jet définit une *structure de Poisson quadratique* c'est à dire une structure de Poisson sur l'espace tangent en m_0 à M pour laquelle le crochet de deux fonctions linéaires est toujours une application quadratique. On peut voir alors notre structure de Poisson comme une déformation de structure de Poisson quadratique. Dans ce travail nous donnons des formes normales pour ce type de structure. Notre intérêt pour ces questions vient, d'une part du fait que les structures de Poisson quadratiques apparaissent naturellement dans différents problèmes (systèmes intégrables, équations de Yang–Baxter, etc.), d'autre part du fait que les points où le 1-jet s'annule apparaissent *de façon stable* dans les structures de Poisson. Précisons ce phénomène: on sait associer à toute structure de Poisson Π son *rotationnel* (voir [DH,We2] où Weinstein le rebaptise "modular vector field"), c'est un champ de vecteurs X, isomorphisme infinitésimal de Π, et qui est défini modulo les champs hamiltoniens. Si Π a son 1-jet nul en un point m_0, alors X s'annule en ce point et sa partie linéaire $X^{(1)}$ est intrinséquement attachée à Π. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de $X^{(1)}$. Soit maintenant une nouvelle structure de Poisson $\Pi' C^2$-proche de Π, alors son rotationnel X' sera C^1-proche de X. Si les valeurs propres de $X^{(1)}$ sont toutes non-nulles alors X' va s'annuler en un point m proche de m_0; de plus on peut voir que si ces valeurs propres ne vérifient aucune relation

$$\lambda_i + \lambda_j = 0, \qquad \lambda_i + \lambda_j = \lambda_k$$

alors il en sera de même des valeurs propres de la partie linéaire de X' en m et cela impose à Π' d'avoir, elle aussi, un 1-jet nul en m.

Rappelons (voir [D2]) qu'en dimension 3 la contraction avec une forme volume (qui existe toujours dans cette étude locale) établit une correspondance bijective entre les structures de Poisson et les 1-formes intégrables. On peut noter que Camacho et Lins-Neto [CLN,LN] avaient déjà remarqué ce phénomène de stabilité des points où le 1-jet est nul dans le cadre des 1-formes intégrables.

Le cas particulier où la dimension de la variété de Poisson est égale à 2 a été traité par Arnol'd (voir [A]). En effet, il y a (à isomorphisme près) quatre modèles de structures de Poisson quadratiques sur $\mathbb{R}^2$ qui sont

$$\begin{aligned} Q_0 &= 0, \\ Q_1 &= \alpha x y \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}, \\ Q_2 &= \alpha (x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}, \\ Q_3 &= \alpha x^2 \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

où α est un réel non nul. Toute structure de Poisson Π nulle à l'origine O de $\mathbb{R}^2$, dont le 2-jet en O est du type Q_1 (resp. Q_2) se ramène par un changement de coordonnées à sa partie quadratique. Autrement dit, il existe des coordonnées locales (x', y') nulles en O telles que $\Pi(x', y') = Q_1(x', y')$ (resp. $\Pi(x', y') = Q_2(x'y')$). Cependant, le modèle Q_3 ne possède pas cette propriété. En général, les formes normales des structures de Poisson sur $\mathbb{R}^2$ nulles en O qui admettent pour 2-jet en O une structure de Poisson du type Q_3 comportent des termes d'ordre supérieur à 2 et on a les modèles

$$x^2 + a y^p \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}.$$

Comme nous faisons une étude locale nous travaillerons sur la variété $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) avec $m_0 = O$. Dans [DH] il a été montré que, si les valeurs propres de la partie linéaire du rotationnel ne vérifent aucune relation non triviale

$$\lambda_i + \lambda_j = \lambda_r + \lambda_s,$$

alors la partie quadratique $\Pi^{(2)}$ est *diagonalisable*, c'est à dire qu'il existe un changement de variables linéaire complexe qui met cette partie quadratique sous la forme

$$\Pi^{(2)} = \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Par la suite nous supposerons que $\Pi^{(2)}$ est toujours de ce type; c'est, en un sens discutable, le cas "générique". Dans [D2] on avait donné une forme normale assez grossière et des théorèmes de "quadratisation" pour de telles structures de Poisson à 1-jet nul: le principe qui menait à ces résultats était de mettre le rotationnel X sous forme normale et d'exploiter ensuite la relation $L_X \Pi = 0$. Les résultats s'exprimaient donc en fonction du spectre $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de la partie linéaire $X^{(1)}$ de X. Il nous est apparu que l'on pouvait faire mieux en utilisant plutôt la matrice des a_{ij} qui intervient dans l'écriture "diagonale" de $\Pi^{(2)}$ que l'on vient de donner (les λ_k sont les sommes des coefficients des lignes de cette matrice). Nous obtenons ainsi une théorie de forme normale formelle pour les structures de Poisson à 1-jet nul qui est assez proche de celle des champs de vecteurs nuls en un point: la matrice A des a_{ij} jouant le rôle du spectre de la partie linéaire du champ de vecteurs. Avant d'énoncer notre résultat principal dans cette direction nous précisons quelques notations: on prend $Y_i = x_i \partial/\partial x_i$ et, pour des multi-indices $I = (I_1, \dots, I_n)$ dans $(\mathbb{N} \cup \{-1\})^n$, on pose $x^I = x_1^{I_1} \times \cdots \times x_n^{I_n}$. L'hypothèse (H) est une hypothèse générique qui est explicitée dans notre troisième paragraphe. On a alors le résultat suivant.

Théorème 1. *Toute structure de Poisson à 1-jet nul à l'origine et dont la partie quadratique, de forme $\Pi^{(2)}$, satisfait l'hypothèse* (H)*, est formellement isomorphe à une structure de Poisson du type:*

$$\Pi = \sum_{i<j} \sum_{A \cdot I = 0} x^I \alpha_{ij}^I Y_i \wedge Y_j.$$

Ce travail comporte quatre sections. Dans Section 1, nous rappelons quelques résultats sur les structures de Poisson quadratiques. Dans Section 2, nous introduisons l'opérateur de cohomologie de Poisson dont on se servira pour trouver une forme normale de structures de Poisson. Section 3 est consacrée au Théorème 1. Enfin, dans Section 4, nous donnons un résultat de quadratisation en classe C^∞ (Théorème 2) qui est, en partie, un corollaire du Théorème 1.

1. Structures de Poisson quadratiques

Par la suite le symbole $\mathbb{K}$ désignera soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.

Définition. Un crochet de Poisson sur un espace vectoriel (réel ou complexe) est dit *quadratique* si le crochet de deux formes linéaires est toujours une forme quadratique.

Les structures de Poisson quadratiques s'introduisent de façon naturelle lorsqu'on étudie les solutions de l'équation de Yang–baxter dans les groupes de Lie (voir [Sk,Dr,BB]). On trouve dans [DH], la classification complète des structures de Poisson quadratiques en dimension 3. Celle-ci figure aussi dans [LX]. Dans [EG] cette étude est étendue à la dimension 4.

Définition. Une structure de Poisson quadratique Π est dite *diagonalisable* s'il existe un système de coordonnées $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dans lesquelles elle s'écrit

$$\Pi = \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

On dit alors que $(x_1, \ldots, x_n)$ est un système de *coordonnées adaptées* à la structure de Poisson quadratique diagonalisable. La matrice antisymétrique (a_{ij}) est appelée *expression diagonale* de Π relativement au système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$.

Le problème naturel que l'on se pose est le suivant: étant donnée une structure de Poisson quadratique diagonalisable, son expression diagonale est-elle unique? La réponse à cette question est affirmative: on a la proposition suivante

Proposition 1. *On considère une structure de Poisson quadratique diagonalisable sur $\mathbb{K}^n$ et deux systèmes de coordonnées adaptées $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$. On note $A = (a_{ij})$ et $A' = (a'_{ij})$ respectivement les expressions diagonales de cette structure de Poisson relativement aux coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(x'_1, \ldots, x'_n)$. Il existe une matrice M_P d'une permutation P des vecteurs de la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ définie par $P(e_i) = e_{\sigma(i)}$ telle que:*

$$A' = M_P^{-1} A M_P.$$

Cette proposition nous dit que, modulo une permutation, les vecteurs lignes des matrices A et A' sont identiques. Ce sont des invariants pour la structure de Poisson considérée. Sa démonstration se fait par récurrence sur n (voir [Wa]). On peut se demander s'il y a une décomposition des structures de Poisson quadratiques analogue à celle de Jordan pour les champs de vecteurs linéaires. Il faudra d'abord trouver une bonne définition de la notion de structure de Poisson quadratique "nilpotente".

2. Cohomologie de Poisson et forme normale de structure de Poisson

Soit $\Pi = \Pi^{(2)} + P$ une structure de Poisson sur $\mathbb{K}^n$ ayant $\Pi^{(2)}$ pour 2-jet en O. Pour réduire Π à une forme normale formelle, l'outil essentiel utilisé ici est l'opérateur de cohomologie de Poisson associé à $\Pi^{(2)}$ que l'on note $\delta\Pi^{(2)}$. Pour tout entier positif p, $\delta\Pi^{(2)}$ envoie l'espace $V_p(\mathbb{K}^n)$ des champs de p-vecteurs sur $\mathbb{K}^n$ sur celui $V_{p+1}(\mathbb{K}^n)$ des champs de $(p+1)$-vecteurs sur $\mathbb{K}^n$. Il est défini par:

$$\delta\Pi^{(2)} : \mathcal{S} \mapsto [\mathcal{S}, \Pi^{(2)}],$$

où [,] est le crochet de Schouten. A cause de l'identité de Jacobi $[\Pi^{(2)}, \Pi^{(2)}] = 0$, on a $\delta\Pi^{(2)} \circ \delta\Pi^{(2)} = 0$. Le p-ième groupe de cohomologie est donnée par:

$$H^{(p)} = \frac{\ker(\delta\Pi^{(2)} : V_p(\mathbb{K}^n) \longrightarrow V_{p+1}(\mathbb{K}^n))}{Im(\delta\Pi^{(2)} : V_{p-1}(\mathbb{K}^n) \longrightarrow V_p(\mathbb{K}^n))}.$$

Notations. Soit Π une structure de Poisson nulle en O ayant pour développement formel

$$\Pi = \sum_{i<j} \left(a_{ij}x_i x_j + \sum_{|I|\geq 3} a_{ij}^I x^I \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j},$$

où les multi-indices $I = (I_1, \ldots, I_n)$ sont dans $\mathbb{N}^n$, $x^I = x_1^{I_1} \times \cdots \times x_n^{I_n}$ et $|I| = \sum_j I_j$.

Dans la suite on utilisera la notation $Y_i = x_i\partial/\partial x_i$ et on remplacera $x_j\partial/\partial x_i$ par $(x_j/x_i)Y_i$. Ceci a l'inconvénient d'introduire des puissances négatives pour les x_i, mais permet d'alléger l'écriture des structures de Poisson au moins lorsqu'on travaille formellement. Nous pouvons alors écrire:

$$\Pi = \sum_{\substack{i<j \\ I}} \alpha_{ij}^I x^I Y_i \wedge Y_j.$$

Dans cette écriture de Π les n-uplets I sont des éléments de $(\mathbb{N} \cup \{-1\})^n$, ils contiennent au plus deux composantes négatives égales à -1. On distingue trois cas:

1 Si $I \in \mathbb{N}^n$ il n'y a aucune contrainte particulière sur les coefficients α_{ij}^I.
2 Si I contient une composante négative $I_k = -1$ alors α_{ij}^I est nul à chaque fois que i et j sont différents de k.
3 Si I contient deux composantes négatives $I_r = I_s = -1$ alors les α_{ij}^I sont tous nuls sauf peut-être pour $\{i, j\} = \{r, s\}$.

Posons:

$$\Pi^{(I)} = x^I \sum_{i<j} \alpha_{ij}^I Y_i \wedge Y_j, \qquad \Pi^{(2)} = \sum_{i<j} a_{ij} Y_i \wedge Y_j.$$

Alors, on obtient

$$\Pi = \Pi^{(2)} + \sum_{I\neq 0} \Pi^{(I)}.$$

On a la proposition suivante:

Proposition 2. *Si $\Pi^{(I)}$ est un 2-cobord non nul pour $\delta\Pi^{(2)}$ alors il existe un changement de coordonnées $\varphi : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (y_1, \ldots, y_n)$ du type $\varphi = id + \varphi^I$ (où les composantes de φ^I sont des fonctions polynômiales homogènes de degré strictement supérieur à 2) qui élimine le terme $\Pi^{(I)}$ c'est-à-dire qu'on a:*

$$\varphi_*\Pi = \Pi^{(2)} + \sum_{\substack{1\leq|J|\leq p-2 \\ J\neq I}} \Pi^{(J)} + O(\|y\|^p),$$

avec $p = |I| + 2$.

Tout d'abord, décrivons les champs de bivecteurs sur $\mathbb{K}^n$ qui sont des 2-cobords. Si Λ est un 2-cobord, il existe un champ de vecteurs Z s'annulant à l'origine tel que $\Lambda = \delta\Pi^{(2)}(Z)$. Avec les notations précédentes, nous pouvons écrire

$$Z = \sum_I Z_i^I x^I Y_i.$$

Les I intervenant dans l'écriture de Z sont dans $(\mathbb{N} \cup \{-1\})^n$, ils contiennent au plus une composante négative: lorsque I est dans $\mathbb{N}^n$ il n'y a pas de contrainte sur les réels Z_i^I; par contre si I contient une composante négative $I_j = -1$ alors pour tout $i \neq j$, le coefficient Z_i^I est nul.

En utilisant la propriété du crochet de Schouten qui dit que quels que soient les champs de vecteurs A, B et C on a la relation suivante:

$$[A, B \wedge C] = [A, B] \wedge C - [A, C] \wedge B.$$

et avec la notation

$$A_i \cdot I = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} I_j,$$

il vient:

$$\delta\Pi^{(2)}(Z) = \sum_{\substack{i<j \\ I}} x^I (Z_i^I A_j \cdot I - Z_j^I A_i \cdot I) Y_i \wedge Y_j. \tag{1}$$

Preuve de Proposition 2. Si $\Pi^{(I)}$ est un 2-cobord alors il existe un champ de vecteurs Z de degré $p-1$ tel que $\Pi^{(1)} = \delta\Pi^{(2)}(Z)$.
Posons

$$Z = \sum_{i,j} x^J Z_i^J Y_i.$$

A cause de relation (1) on a

$$\alpha_{ij}^I = Z_i^I A_j \cdot I - Z_j^I A_i \cdot I. \tag{2}$$

Considérons maintenant le changement de coordonnées

$$\varphi : (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (y_1, \ldots, y_n)$$

défini au voisinage de O par: $y_i = x_i\theta_i$ avec $\theta_i = 1 + Z_i^I x^I$.
On a:

$$\begin{aligned}
\{y_i, y_j\} &= \theta_i\theta_j\{x_i, x_j\} + x_j\theta_i\{x_i, \theta_j\} + x_i\theta_j\{\theta_i, x_j\} \\
&= \theta_i\theta_j\{x_i, x_j\} + x_j\theta_i \sum_i \frac{\partial\theta_j}{\partial x_l}\{x_i, x_l\} \\
&\quad - x_i\theta_j \sum_l \frac{\partial\theta_i}{\partial x_l}\{x_j, x_l\}.
\end{aligned}$$

Pour les commodités du calcul on pose:

$$\Lambda_{ij}(x) = \sum_{\substack{1\leq |J| \leq p-2 \\ J\neq I}} x^J \alpha_{ij}^J.$$

Π vient

$$\{y_i, y_j\} = \theta_i\theta_j x_i x_j \left(a_{ij} + \Lambda_{ij}(x) + x^I\left(\alpha_{ij}^I + A_i \cdot I \frac{Z_j^I}{\theta_j} - A_j \cdot I \frac{Z_i^I}{\theta_i}\right)\right) + \mathrm{O}(\|x\|^p).$$

En tenant compte de relation (2) et du fait que le changement de coordonnées réciproque de φ est donné par:

$$x_i = y_i(1 - Z_i^I y^I) + \mathrm{O}(\|y\|^{p-1}),$$

on obtient:

$$\{y_i, y_j\} = y_i y_j (a_{ij} + \Lambda_{ij}(y)) + \mathrm{O}(\|y\|^p).$$

D'où la proposition. □

On est donc amené à caractériser l'ensemble des n-uplets I tels que $\Pi^{(I)}$ soit un 2-cobord. Pour simplifier l'écriture notons:

$$A \cdot I = \sum_{1\leq i\leq n} A_i \cdot I Y_i,$$

$$\Pi_D^I = \sum_{i<j} \alpha_{ij}^I Y_i \wedge Y_j,$$

$$\Pi^{(I)} = x^I \Pi_D^I.$$

On a la proposition:

Proposition 3. *Pour que $\Pi^{(I)}$ soit un 2-cobord non nul il faut et il suffit que les trois conditions suivantes soient satisfaites:*
(a) $A \cdot I \neq 0$,
(b) $A \cdot I \wedge \Pi_D^I = 0$,
(c) *I contient au plus une composante négative.*

Preuve. (1) Elles sont nécessaires: si $\Pi^{(I)}$ est un 2-cobord non nul, il existe un champ de vecteurs $Z = \sum_{i,j} x^J Z_i^J Y_i$ (avec $Z_i^J \in \mathbb{R}$) tel que l'on ait la relation

$$\alpha_{ij}^I = Z_i^I A_j \cdot I - Z_j^I A_i \cdot I. \tag{2}$$

En posant:

$$Z_D^I = \sum_{i=1}^{n} Z_i^I Y_i,$$

relation (2) devient

$$\Pi_D^I = Z_D^I \wedge A \cdot I. \tag{3}$$

Or, Π_D^I est non nul, donc il découle de la relation (3) que conditions (a) et (b) sont réalisées. La condition (c) résulte du fait que les composantes $Z_i^I x^I x_i$ du champ de vecteurs Z sont des fonctions polynômiales homogènes de degré $p-1$.

(2) Elles sont suffisantes: nous dinstinguons les deux cas suivants

Cas 1: supposons que $I \in \mathbb{N}^n$. Les conditions (a) et (b) assurent l'existence d'un champ de vecteurs diagonal Z_D^I vérifiant la relation (3). Cette dernière équivaut à

$$\Pi^{(I)} = \delta \Pi^{(2)}(x^I Z_D^I).$$

Cas 2: Si I comporte une composante négative $I_i = -1$, alors on a d'une part

$$\Pi_D^I = Y_i \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^I Y_j \right).$$

D'autre part, les conditions (a) et (b) permettent de décomposer Π_D^I sous la forme

$$\Pi_D^I = Z_D^I \wedge A \cdot I,$$

on s'aperçoit donc que dans la décomposition de Π_D^I comme produit extérieur de deux champs de vecteurs diagonaux on peut mettre en facteurs les champs de vecteurs Y_i et $A \cdot I$. Mais, il faudra s'assurer que ces deux champs de vecteurs ne sont pas colinéaires. Supposons un instant que $A \cdot I$ ne soit pas colinéaire à Y_i alors on a:

$$\Pi_D^I = \lambda^I Y_i \wedge A \cdot I, \tag{4}$$

où λ^I est une constante non nulle. Cette relation (4) signifie que le champ de vecteurs $Z = \lambda^I x^I Y_i$ vérifie $\Pi^{(I)} = \delta \Pi^{(2)}(Z)$. Autrement dit, le terme $\Pi^{(I)}$ est un cobord. Il suffit donc de prouver que les champs diagonaux $A \cdot I$ et Y_i ne sont pas colinéaires, ce qui revient à montrer que $A \cdot I \neq A_i \cdot I Y_i$. Montrons-le par l'absurde.

Supposons qu'on ait $A_j \cdot I = 0$ pour tout $j \neq i$. Ceci équivaut à:

$$a_{ij} = \sum_{l=i} a_{jl} I_l. \tag{5}$$

En multipliant (5) par I_j et en faisant la somme sur tous les j différents de i on obtient:

$$A_i \cdot I = \sum_{\substack{l \neq i \\ j \neq i}} a_{jl} I_j I_l. \tag{6}$$

Or, le second membre de (6) est nul à cause de l'antisymétrie de la matrice (a_{ij}) donc on aurait $A \cdot I = A_i \cdot I Y_i = 0$. Ce qui contredirait l'hypothèse (a). D'où le résultat. □

3. Réduction à une forme normale formelle

Rappelons que deux structures de Poisson Π et Π' sont dites formellement (resp. C^∞) isomorphes s'il existe un difféomorphisme formel (resp. C^∞) noté φ tel que $\varphi_*\Pi = \Pi'$ c'est-à-dire qu'on a:

$$\{f, g\}_{\Pi'} \circ \varphi = \{f \circ \varphi, g \circ \varphi\}_\Pi,$$

pour tous f et g, $\{\ ,\ \}_{\Pi'}$ et g, $\{\ ,\ \}_\Pi$ étant les crochets de Poisson associés respectivement à Π' et Π.

Dans la suite, on supposera que $(M, m_0) = (\mathbb{K}^n, \mathrm{O})$ et Π désignera toujours une structure de Poisson sur $\mathbb{K}^n$ dont le 2-jet en O est une structure de Poisson quadratique diagonalisable $\Pi^{(2)}$ d'expression diagonale $A = (a_{ij})$. Avec les notations de la section précédente, on a le développement formel

$$(N_0) \qquad \Pi = \Pi^{(2)} + \sum_{I \neq 0} \Pi^{(I)}.$$

Nous allons montrer que Π est formellement isomorphe à une structure de Poisson du type

$$\tilde{\Pi} = \Pi^{(2)} + \sum_{\substack{I > 1 \\ A \cdot \bar{I} = 0}} \tilde{\Pi}^{(I)}.$$

Pour cela, nous construisons par réccurence un changement de coordonnées formel qui permet d'éliminer successivement tous les termes $\Pi^{(I)}$ qui sont tels que $A \cdot I \neq 0$. En fait, la difficulté se présente à partir des termes de degré 4. En effet, condition (b) de Proposition 3 est toujours réalisée pour les termes $\Pi^{(I)}$ de degré 3. Puisque dans l'identité de Jacobi $[\Pi, \Pi] = 0$, les termes de plus bas degré donnent

$$0 = [\Pi^{(2)}, \Pi^{(I)}] = x^I A \cdot I \wedge \Pi^I_D.$$

pour tout I de longueur $|I| = 1$. Ainsi, les termes $\Pi^{(I)}$ de degré 3 tels que I contiennent au plus une composante négative, satisfont aux conditions (b) et (c) de Proposition 3. Cette dernière montre que parmi ces termes, ceux vérifiant la relation $A \cdot I \neq 0$, sont des 2-cobords. On applique la Proposition 2 qui assure l'existence d'un changement de coordonnées φ éliminant tous les termes $\Pi^{(I)}$ de degré 3 tels que I comporte au plus une composante négative et vérifie $A \cdot I \neq 0$.

Mais, la condition (b) n'est en général pas satisfaite par les termes $\Pi^{(I)}$ de degré strictement supérieur à 3. Par exemple, pour ce qui est des $\Pi^{(I)}$ de degré 4, l'identité de Jacobi donne:

$$\sum_{|I|=2} \left([\Pi^{(2)}, \Pi^{(I)}] + \sum_{\substack{J+K=I \\ J\neq 0, K\neq 0}} [\Pi^{(J)}, \Pi^{(K)}] \right) = 0. \tag{7}$$

Or, on a la propriété suivante:

Propriété 1. *On a:*

$$[\Pi^{(J)}, \Pi^{(K)}] = x^{J+K} \Lambda^{(J,K)} \quad \textit{pour tous } J \textit{ et } K,$$

où $\Lambda^{(J,K)}$ est un champ de 3-vecteurs diagonal, c'est-à-dire qu'il s'écrit sous la forme $\Lambda^{(J,K)} = \sum \gamma_{ijk}^{J,K} Y_i \wedge Y_j \wedge Y_k$, avec $\gamma_{ijk}^{J,K} \in \mathbb{K}$.

Pour justifier cette propriété, il suffit de développer la relation:

$$[\Pi^{(J)}, \Pi^{(K)}] = \left[\sum_{i<j} x^J \alpha_{ij}^J Y_i \wedge Y_j, \sum_{r<s} x^K \alpha_{rs}^K Y_r \wedge Y_s \right],$$

en utilisant le fait que quels que soient les champs de vecteurs X, Y, Z et T on a la relation

$$[X \wedge Y, Z \wedge T] = [X, Z] \wedge Y \wedge T - [X, T] \wedge Y \wedge Z$$
$$- [Y, Z] \wedge X \wedge T + [Y, T] \wedge X \wedge Z. \qquad \square$$

Donc si $|I| = 2$, la relation (7) s'écrit:

$$A \cdot I \wedge \Pi_D^I + \sum_{J+K+I} \Lambda^{(J,K)} = 0. \tag{8}$$

Cette dernière relation montre qu'en général, la condition (b) de la Proposition 3 n'est pas réalisée par les termes $\Pi^{(I)}$ de degré 4.

En fait, on a la relation (8) pour tous les $\Pi^{(I)}$ de degré strictement supérieur à 3. On peut donc dire (Proposition 3) que d'une manière générale, les termes $\Pi^{(I)}$ de degré strictement supérieur à 3 ne sont pas des 2-cobords. Pour s'affranchir de cette difficulté, nous imposons l'hypothèse générique suivante:

(H) Pour tout $I = (I_1, \ldots, I_{i-1}, -1, I_{i+1}, \ldots, I_{j-1}, -1, I_{j+1}, \cdots, I_n)$ avec $I_l \in \mathbb{N} (\forall l \neq i, j)$, si $A\dot{I} \wedge Y_i \wedge Y_j = 0$ alors $A \cdot I = 0$.

A présent nous sommes en mesure de formuler le

Théorème 1. *Toute structure de Poisson à 1-jet nul à l'origine et dont la partie quadratique, de forme $\Pi^{(2)}$, satisfait l'hypothèse* (H)*, est formellement isomorphe à une structure de Poisson du type*

$$(N_1) \qquad \Pi = \sum_{\substack{i<j \\ A \cdot I = 0}} x^I \alpha_{ij}^I Y_i \wedge Y_j.$$

Remarquons d'abord que le champ de vecteurs diagonal

$$A \cdot I = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot I Y_i = \sum_{1<i,j<n} a_{ij} I_j Y_i$$

s'identifie avec l'image de I par l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ ayant $A = (a_{ij})$ pour matrice. On voit donc que seuls les n-uplets I qui sont dans le noyau de cet endomorphisme interviennent dans la forme normale (N_1). Si en plus de l'hypothèse (H), la matrice $A = (a_{ij})$ est inversible alors $\Pi^{(2)}$ est formellement isomorphe à toute structure de Poisson dont elle est le 2-jet en O.

Avant de passer à la démonstration du théorème, voyons comment s'interprète l'hypothèse (H) dans le cas particulier où $n = 3$. Considérons la structure de Poisson diagonale sur $\mathbb{K}^3$ définie par

$$\Pi^{(2)} = cxy\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} + ayz\frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + bzx\frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x},$$

avec $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Tout multi-indice comportant deux composantes négatives s'écrit sous l'une des formes suivantes:

$$\begin{aligned} \bar{I} &= (I_1, -1, -1), && I_1 \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\},\\ J &= (-1, J_2, -1), && J_2 \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\},\\ K &= (-1, -1, K_3), && K_3 \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}. \end{aligned}$$

Donc l'hypothèse (H) se traduit par les assertions suivantes:
- Si $c - b = 0$ alors $cI_1 + a = 0$ et $bI_1 + a = 0$, pour tout $I_1 \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}$.
- Si $c - a = 0$ alors $cJ_2 + b = 0$ et $aJ_2 + b = 0$, pour tout $J_2 \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}$.
- Si $a - b = 0$ alors $bK_3 + c = 0$, et $aK_3 + c = 0$, pour tout $K_3 \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}$.

Comme les coefficients a, b et c ne sont pas simultanément nuls, pour que l'hypothèse (H) soit réalisée, il faut et il suffit qu'on ait $(a - b)(b - c)(c - a) \neq 0$.

Notation. On note $V_q^{(p)}$ l'espace des champs de q-vecteurs sur $\mathbb{K}^n$ dont les coefficients sont des fonctions polynômiales homogènes de degré p et on désigne par $N_q^{(p)}$ le sous-espace vectoriel de $V_q^{(p)}$ formé d'éléments du type:

$$\Lambda = \sum_{\substack{|I|=p-q\\ A\cdot I=0}} \Lambda^I_{i_1\ldots i_q} x^I Y_{i_1} \wedge \cdots \wedge Y_{i_q}.$$

C'est-à-dire que les I intervenant dans les coefficients des éléments de $N_q^{(p)}$ sont dans le noyau de l'endomorphisme de matrice A.

La démonstration du Théorème 1 utilise le lemme suivant:

Lemme 1. *Si $\Pi^{(J)}$ et $\Pi^{(K)}$ sont respectivement dans $N_2^{(l)}$ et $N_2^{(m)}$ alors leur crochet $[\Pi^{(J)}, \Pi^{(K)}]$ est dans $N_3^{(l+m-1)}$.*

La preuve de ce lemme est une conséquence immédiate de la Propriété 1.

Démonstration du Théorème 1. Il s'agit d'éliminer pas à pas tous les termes $\Pi^{(I)} = x^I \sum_{i<j} \alpha^I_{ij} Y_i \wedge Y_j$ de la décomposition (N_0) vérifiant $A \cdot I \neq 0$. Supposons qu'on ait:

$$\Pi = \Pi^{(2)} + \sum_{\substack{0<|J|\leq p-3\\ A\cdot J=0}} \Pi^{(J)} + \sum_{|I|=p-2} \Pi^{(I)} + \mathrm{O}(\|x\|^p).$$

Dans l'identité de jacobi $[\Pi, \Pi] = 0$, les termes de degré $p + 1$ donnent:

$$\sum_{|I|=p-2} \left([\Pi^{(2)}, \Pi^{(I)}] + \sum_{\substack{J+K=I \\ J\neq 0, K\neq 0}} [\Pi^{(J)}, \Pi^{(K)}] \right) = 0. \tag{9}$$

Grâce au Lemme 1, on peut décomposer (9) en:

$$\sum_{\substack{|I|=p-2 \\ A\cdot I\neq 0}} [\Pi^{(2)}, \Pi^{(I)}] = 0,$$

$$\sum_{\substack{|I|=p-2 \\ A\cdot I=0}} \left([\Pi^{(2)}, \Pi^{(I)}] + \sum_{\substack{J+K=I \\ J\neq 0, K\neq 0}} [\Pi^{(J)}, \Pi^{(K)}] \right) = 0.$$

Ce qui peut encore s'écrire

$$\begin{array}{ll} A \cdot I \wedge \Pi_D^I = 0 & \text{si } A \cdot I \neq 0, \\ A \cdot I \wedge \Pi_D^I + \Lambda^I = 0 & \text{si } A \cdot I = 0. \end{array} \tag{10}$$

Λ^I étant un champ de 3-vecteurs diagonal. Considérons maintenant un terme $\Pi^{(I)}$ de degré p tel que $A \cdot I$ soit non nul. Deux cas sont à envisager.

- Si I comporte au plus une composante négative, alors $\Pi^{(I)}$ satisfait aux hypothèses de la Proposition 3. Celle-ci assure qu'il est un 2-cobord. On applique la Proposition 2 qui montre l'existence d'un changement de coordonnées φ_I éliminant le terme $\Pi^{(I)}$.
- Si $I = (I_1, \dots, I_{i-1}, -1, I_{i+1}, \dots, I_{j-1}, -1, I_{j+1}, \dots, I_n)$ avec $I_l \in \mathbb{N}, \forall l \neq i, j$ alors Π_D^I s'écrit:

  $$\Pi_D^I = \mu Y_i \wedge Y_j,$$

  où μ est une constante. Compte tenu de (10) on a:

  $$A \cdot I \wedge \Pi_D^I = 0.$$

  Ce qui donne:

  $$\mu A \cdot I \wedge Y_i \wedge Y_j = 0.$$

  Si μ n'était pas nul alors en vertu de l'hypothèse (H) on aurait $A \cdot I = 0$. Ce qui est absurde. Donc μ est forcément nul. Π s'ensuit que $\Pi^{(I)} = x^I \Pi_D^I = 0$. Ainsi, de proche en proche, on élimine tous les termes $\Pi^{(I)}$ vérifiant $A \cdot I \neq 0$. Ce qui achève la démonstration. □

4. Un résultat de forme normale en classe C^∞

Soit $\Pi^{(2)}$ une structure de Poisson quadratique diagonalisable sur $\mathbb{R}^n$, d'expression diagonale $A = (a_{ij})$. On désigne par $A_1, \dots, A_n$, les vecteurs lignes de A et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ respectivement la somme des composantes de $A_1, \dots, A_n$.

Théorème 2. *Si les conditions suivantes sont réalisées:*
$(\mathcal{P}_1)$ *Pour tout multi-indice* $I = (I_1, \dots, I_n) \in \mathbb{N}^n$, *on a pour tout* i

$$A_i \neq \sum_{j=1}^{n} A_j I_j.$$

$(\mathcal{P}_2)$ *Pour tout* $I = (I_1, \dots, I_{i-1}, -1, I_{i+1}, \dots, I_{j-1}, -1, I_{j+1}, \dots, I_n)$, *avec* $I_l \in \mathbb{N} (\forall l \neq i, j)$, *il existe un indice* k *différent de* i *et* j *tel que:*

$$a_{ik} + a_{jk} \neq \sum_{l \neq i,j} a_{kl} I_l.$$

$(\mathcal{P}_3)$ *Il existe un indice* i *tel que les coefficients* a_{ik}, *pour tout* $k \neq i$, *sont de même signe et tel que* $\lambda_j \lambda_i < 0, \forall j \neq i$.
Alors toute structure de Poisson $\Pi = \Pi^{(2)} + P$ *sur* $\mathbb{R}^n$, *où le 2-jet en* O *de la perturbation* P *est nul, se ramène à* $\Pi^{(2)}$ *par un changement de coordonnées de classe* C^∞ *convenablement choisi.*

La version formelle de ce théorème que l'on retrouve dans [D3] est un cas particulier du Théorème 1. En effet, $(\mathcal{P})_2$ entraîne l'hypothèse (H). Donc, il découle du Théorème 1, la forme normale formelle suivante:

$$\Pi = \Pi^{(2)} + \sum_{i<j} \sum_{|I|>0, A\cdot I=0} x^I \alpha_{ij}^I Y_i \wedge Y_j.$$

Par ailleurs, si $I \in \mathbb{N}^n - \{0\}$ alors $A \cdot I \neq 0$ car sinon, on aurait

$$A_i = A_i + \sum_{j=1}^{n} + A_j I_j.$$

Ce qui contredirait l'hypothèse $(\mathcal{P}_1)$.
Si $I = (I_1, \dots, I_{i-1}, -1, I_{i+1}, \dots, I_n)$, la relation $A \cdot I = 0$ équivaut à:

$$A_i = \sum_{j \neq i} A_j I_j,$$

ceci est impossible (à cause de $(\mathcal{P}_1)$).

Enfin, lorsque $I = (I_1, \dots, I_{i-1}, -1, I_{i+1}, \dots, I_{j-1}, -1, I_{j+1}, \dots, I_n)$, l'hypothèse $(\mathcal{P}_2)$ nous assure que $A \cdot I$ est non nul. Par conséquent, la forme normale formelle est réduite à $\Pi = \Pi^{(2)}$.

Donc la version formelle du théorème 2 utilise uniquement les hypothèses $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$. Nous allons montrer qu'en renforçant ces hypothèses par $(\mathcal{P}_3)$, nous obtenons une version C^∞. Introduisons les définitions suivantes:

Définition. Un point fixe d'un champ de vecteurs X sur $\mathbb{R}^n$ est dit *hyperbolique* si les parties réelles des valeurs propres de la linéarisée de X en ce point sont toutes non nulles.

Définition. Soit X un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ nul à l'origine de flot (φ_t). On appelle *variété stable* (resp. *instable*) de X en O l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\varphi_t(x)$ soit défini pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ (resp. $t \in \mathbb{R}^-$) et $\lim_{t\to+\infty} \varphi_t(x) = 0$ (resp. $\lim_{t\to-\infty} \varphi_t(x) = 0$).

Lemme 2. *Soit $X = \sum_i \alpha_i x_i \partial x_i$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ diagonal et hyperbolique. Soit f une fonction vérifiant l'équation:*

$$(\varepsilon) \qquad X(f) = cf,$$

oú c est une constante. Si f est plate en O alors elle est plate sur les variétes stable et instable de X en O.

La preuve de ce lemme est sans diffculté, on la trouve par exemple dans [Wa]. Un des outils de la démonstration du Théorème 2 est le résultat de linéarisation d'un champ de vecteurs dont la généralisation a été établie dans la référence [R]:

Théorème 3 [R]. *Soit $X = \sum_{2\le i\le n}(\beta_i(t)x_i + f_i(t, x_2, \dots, x_n))\partial x_i$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ tel que les fonctions $f_i(t, x_2, \dots, x_n)$ soient plates sur l'hyperplan $\{x_2 = \cdots = x_n = 0\}$. Supposons que les coefficients $\beta_i(0)$ sont strictement positifs. Alors il existe un changement de coordonnées*

$$\varphi : (t, x_2, \dots, x_n) \longmapsto (t, y_2, \dots, y_n)$$

défini par: $y_i = x_i + \theta_i(t, x)$ (avec θ_i plate sur $\{x_2 = \cdots = x_n = 0\}$) et telles que

$$\varphi_* X = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(t) y_i \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

En fait, dans la preuve du Théorème 2 on se sert plutôt du cas particulier où les $\beta_i(t)$ sont constantes au voisinage de l'origine. On rappelle la définition du *rotationnel* d'un champ de p-vecteur [DH]. Supposons que la variété M soit orientable et admette la forme volume Ω. L'application Ω^b de l'espace $V_p(M)$ des champs de p-vecteurs dans celui des $(n-p)$-formes différentielles sur M définie par $A \mapsto i_A\Omega$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Notons $\Omega^\#$ son isomorphisme réciproque et $D_\Omega = \Omega^\# \circ d \circ \Omega^b$ (où d est l'opérateur de différentiation extérieure).

Définition. Le rotationnel d'un champ de p-vecteurs A relativement à Ω est le champ de $(p-1)$-vecteurs $D_\Omega(A)$.

Revenons aux structures de Poisson.

Démonstration du Théorème 2. Soit $\Pi = \Pi^{(2)} + P$, une structure de Poisson sur $\mathbb{R}^n$ (où P est un champ de bi-vecteurs d'ordre strictement supérieur à 2 en O). On note $X^{(1)}$ le rotationnel de $\Pi^{(2)}$ relativement à la forme volume canonique Ω_0. On suppose que les hypothèses $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont réalisées. Pour $(\mathcal{P}_3)$, on suppose qu'elle est satisfaite pour l'indice $i = 1$; for example a_{1i} est positif, pour tout $i > 1$. D'après ce qui précède on peut écrire à un C^∞-difféomorphisme près:

$$\Pi = \Pi^{(2)} + \Pi_\infty, \qquad X = X^{(1)} + X_\infty$$

où Π_∞ est un champ de bi-vecteurs plat en O (c'est-à-dire que ses composantes sont des fonctions plates en O), X désigne le rotationnel de Π relativement à Ω_0 et X_∞ plat en O. Comme $X^{(1)}$ est hyperbolique, le résultat classique de Sternberg assure l'existence d'un C^∞-difféomorphisme

$$\psi : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (y_1, \ldots, y_n)$$

défini par:

$$y_i = x_i + \psi_{i\infty}(x),$$

avec des fonctions $\psi_{i\infty}(x)$ plates en O et vérifiant:

$$\psi_* X = X^{(1)}.$$

Posons: $\Pi' = \psi_* \Pi$. La structure de Poisson Π' se décompose en:

$$\Pi' = \Pi^{(2)} + \Pi'_\infty, \tag{11}$$

Π'_∞étant plat en O.

Maintenant, on se sert du fait que le rotationnel $D_\Omega(\Pi)$ d'une structure de Poisson Π relativement à une forme volume Ω est un isomorphisme infinitésimal, c'est-à-dire qu'on a $[\Pi, D_\Omega(\Pi)] = 0$ (voir par example [DH]). Et on tire de la relation $[\Pi, X] = 0$ qu'on a

$$\begin{aligned} 0 = \varphi_*[X, \Pi] &= [\psi_* X, \psi_* \Pi] \\ &= [X^{(1)}, \Pi^{(2)} + \Pi'_\infty] = [X^{(1)}, \Pi'_\infty]. \end{aligned}$$

Notons $\tau_{ij}(y)$ les composantes de Π'_∞. En passant aux coordonnées locales, la relation $[X^{(1)}, \Pi'_\infty]$ donne:

$$X^{(1)}(\tau_{ij}) = (\lambda_i + \lambda_j)\tau_{ij}.$$

Or, les fonctions τ_{ij} sont plates en O donc le Lemme 2 permet de dire qu'elles sont plates sur les sous-variétes $\{y_1 = 0\}$ et $\{y_2 = \cdots = y_n = 0\}$. En particulier, on a:

$$\tau_{ij}(y_1, \ldots, y_n) = y_1 \bar{\tau}_{ij}(y_1, \ldots, y_n).$$

Désignons par X_{y1} le champ de vecteurs hamiltonien de y_1 et posons:

$$A_1 = -\frac{X_{y1}}{y_1} = \sum_{j=2}^{n} (a_{1j} y_j + \bar{\tau}_{1j}) \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Il découle de la propriété $(\mathcal{P}_3)$ que le champ de vecteurs A_1 réalise les hypothèses du théorème de linéarisation à paramètre (Théorème 3), on en conclut qu'il existe un C^∞-difféomorphisme

$$\varphi : (y_1, \ldots, y_n) \mapsto (z_1, \ldots, z_n)$$

défini par: $z_1 = y_1, z_i = y_i + \varphi_i^\infty$ pour tout $i > 1$, les φ_i^∞ ètant des fonctions plates en O telles que:

$$\varphi_* A_1 = \sum_{i=2}^{n} a_{1i} z_i \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

Ce qui équivaut à:

$$A_1(z_i) = a_{1i} z_i,$$

pour tout $i > 1$. Cela peut encore s'écrire:

$$\{z_1, z_i\} = a_{1i} z_1 z_i.$$

Pour finir, on applique l'identité de Jacobi à la structure de Poisson $\varphi_* \Pi'$. On a:

$$\{z_1, \{z_i, z_j\}\} + \{z_i, \{z_j, z_1\}\} + \{z_j, \{z_1, z_i\}\} = 0.$$

Soit,

$$-X_{z_1}(\{z_i, z_j\}) + \{z_i, a_{j1} z_j z_1\} + \{z_j, a_{1i} z_1 z_i\} = 0,$$

ou encore

$$A_1(\{z_i, z_j\}) + (a_{i1} + a_{j1})\{z_i, z_j\} = 0.$$

D'où

$$A_1(\{z_i, z_j\}) = (a_{1i} + a_{1j})\{z_i, z_j\}. \tag{12}$$

Posons:

$$\{z_i, z_j\} = a_{ij} z_i z_j + \nu_{ij}(z_1, \ldots, z_n),$$

les fonctions ν_{ij} sont plates en O et la relation (12) donne:

$$A_i(\nu_{ij}) = (a_{1i} + a_{1j})\nu_{ij}.$$

Fixons z_1, notons:

$$\nu_{ij}^{z_1}(z_2, \ldots, z_n) = \nu_{ij}(z_1, \ldots, z_n)$$

et plaçons-nous sur $\mathbb{R}^{n-1}$ muni du système de coordonnées $(z_2, \ldots, z_n)$. D'après l'hypothèse $(\mathcal{P}_3)$ le champ de vecteurs A_1 est hyperbolique. On applique le lemme 2 qui montre que les $\nu_{ij}^{z_1}$ sont plates sur les variétés stable et instable de A_1 en O. Mais, le fait que les a_{1i} soient tous positifs implique également que la variété instable de A_1 en O coincide avec $\mathbb{R}^{n-1}$ tout entier. On en conclut que

$$\nu_{ij}^{z_1}(z_2, \ldots, z_n) = \nu_{ij}(z_1, \ldots, z_n) = 0,$$

pour tout $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$.

D'où

$$\{z_i, z_j\} = a_{ij} z_i z_j.$$

Ce qui achève la démonstration. □

Référence

[A] V.I. Arnol'd, *Geometrical Methods in the Theory of Differential Equations*, 2nd Ed., Grundlehren der mathematischen (Springer, Berlin, 1988).

[BB] A.A. Balinskii and Yu. Burman, Quadratic Poisson brackets and the Drinfeld theory for associative algebras, Lett. Math. Phys. 38 (1) (1996) 63–75.

[CLN] C. Camacho and A. L. Neto, The topology of integrable differentiable forms near a singularity, Pub. Math. I.H.E.S. 55 (1982) 5–35.

[Ch] M. Chaperon, Géométrie différentielle et singularitiés de systèmes dynamiques, Astérisque (1986) 138–139.

[C1] J.F. Conn, Normal forms for analytic Poisson structures, Ann. of Math. (2) 119 (1984) 576–601.

[C2] J.F. Conn, Normal forms for smooth Poisson structures, Ann. of Math. (2) 121 (1985) 565–593.

[De] N. Desolneux-Moulis, Linéarisation de certains structures de Poisson, Pub. Dép Math. Univ. Claude Bernard Lyon (1986).

[Dr] V.G. Drinfel'd, Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and goemetric meaning of classical Yang–Baxter equations, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 268 (1983) 285–287.

[DH] J.P. Dufour and A. Haraki, Rotationnels etstructures de Poisson quadratiques, C. R. Acad. Sci. Paris (I) 312 (1991) 137–140.

[D1] J.P. Dufour, Linéarisation de strucutres de Poisson, J. Differential Geom. 32 (1990) 415–428.

[D2] J.P. Dufour, Quadratisation de structures de Poisson (à paraître).

[D3] J.P. Dufour, Quadratisation de strctures de Poisson à partie quadratique diagonale, Séminaire Gaston Darboux (1993).

[EG] M. El Galiou, Structures de Poisson homogènes. Déformations. Star-Produits. Thése de la Faculté des Sciences-Semlalia, Marrakech (1996).

[H] A. Haraki, Structures de Poisson quadratiques, Thèse Montpellier (1993).

[K] J.L. Koszul, Crochets de Schouten-Nijenhuis et cohomologie. Astérisque (hors série) 127 bis (1985) 257–271.

[L] A. Lichnerowicz, Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, J. Differential Geom. 12 (1977) 253–300.

[LM] P. Libermann and M. Marle, *Symplectic geometry and analytical mechanics* (Reidel, Dordrecht, 1987).

[LN] A.L. Neto, Local structural stability of C^2 integrable 1-forms, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 27 (2) (1977) 197–225.

[LX] Z.L. Liu and P. Xu, On quadratic Poisson structures, Lett. Math. Phys. 26 (1992) 33–42.

[Ma] J. Martinet, Normalisation des champs de vecteurs holomorphes (d'après A.D. Brujno), Sèminaire Bourbaki 564 (1980–1981).

[Mo] J.C. Molinier, Linéarisation de structures de Poisson, Thèse Montpellier (1993).

[R] R. Roussarie, Modèles locaux de champs de vecteurs et formes, Astérisque (1975), Société de Math. de France.

[Sch] J.A. Schouten, On the differential operators of first order in tensor calculus, Convegno Int. Geom. Diff. Italia (1953) 1–7, Roma, Cremonese (1954).

[Sk] E.K. Sklyanin, Some algebraic structures connected with the Yang–Baxter equation, Functional Anal. Appl. 16 (1982) 263–270.

[Wa] A. Wade, Normalisation de structures de Poisson. Thèse Montpellier (1996).

[We1] A. Weinstein, The local structure of Poisson manifold, J. Differential Geom. 18 (1982) 523–557.

[We2] A. Weinstein, The modular-automorphism group of a Poisson manifold, preprint (mai 1996).